

به نام خدا

پاسخنامه ی آزمون آبان ماه ریاضی ۱

کلاس های ۱۰۷ و ۱۰۸

۱ - مقدار عددی عبارت مقابل را به دست آورید.

$$A = ۲ + ۵^۲ + ۵ + ۵^۵ + ۸ + ۵^۸ + \dots + ۶۲ + ۵^{۶۲}$$
$$= (۲ + ۵ + ۸ + \dots + ۶۲) + \underbrace{(۵^۲ + ۵^۵ + ۵^۸ + \dots + ۵^{۶۲})}_B$$

$$\text{تعداد} = \frac{۶۲ - ۲}{۳} + ۱ = ۲۱ \longrightarrow \text{مجموع} = \frac{۶۴ \times ۲۱}{۲} = ۶۷۲$$

$$۵^۳ B = ۵^۵ + ۵^۸ + ۵^{۱۱} + \dots + ۵^{۶۵} \longrightarrow ۱۲۵B - B = ۱۲۴B = ۵^{۶۵} - ۵^۲$$

$$= \frac{۵^{۶۵} - ۵^۲}{۱۲۴} = A = ۶۷۲ + \frac{۵^{۶۵} - ۵^۲}{۱۲۴}$$

۲ - حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$B = ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲۷} - \frac{۱}{۸۱}$$

$$B = -۲ + \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \dots \right) - \left( \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۷} + \dots \right) = -۲ + \left( \frac{۱}{۲} \right) - \left( \frac{۱}{۳} \right) =$$

$$= -۲ + ۱ - \frac{۱}{۳} = -\frac{۴}{۳}$$

۳- مقدار عددی عبارت مقابل را به دست آورید.

$$C = \frac{4}{5 \times 7} + \frac{4}{7 \times 9} + \frac{4}{9 \times 11} + \dots + \frac{4}{61 \times 63} =$$

$$\frac{1}{2}C = \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{61 \times 63} = \frac{1}{2}C = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{63} =$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{63} = \frac{63-5}{315} = \frac{58}{315}$$

$$\longrightarrow C = \frac{116}{315}$$

۴- اگر در یک دنباله ی حسابی  $t_7=8$  و  $S_{19}=17$  باشد، آنگاه  $S_7$  را بیابید.

$$\lambda = t_7 = a + (n-1)d = a + 6d \text{ و } S_{19} = \frac{19(a + a + 18d)}{2} = 17$$

$$34 = 38d + 342d \longrightarrow \begin{cases} 19a + 171d = 17 \\ a + 6d = 8 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 19a + 171d = 17 \\ -19a - 114d = -152 \end{cases}$$

$$= 57d = -135$$

$$d = -2/36 \longrightarrow a - 14/16 = 8 \longrightarrow a = 22/16$$

$$S_7 = \frac{7 \times (22/16 + 8)}{2} = 10.5/56$$

$$d = \frac{tm - tn}{m - n}$$

۵- در یک دنباله ی حسابی ثابت کنید.

$$d = \frac{tm - tn}{m - n} \rightarrow \frac{tm - tn}{m - n} = d \rightarrow \frac{a + (m-1)d - a - (n-1)d}{m - n}$$

$$\frac{\cancel{a} + md - \cancel{a} - \cancel{a} - nd + \cancel{a}}{m - n} = \frac{md - nd}{m - n} = \frac{d(m - n)}{m - n} = d$$

۶- عدد  $\frac{2-\sqrt{8}}{3}$  را روی محور اعداد نمایش دهید و مراحل رسم را کاملاً توضیح دهید.

۷- اگر  $A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}\}$  آنگاه مجموعه های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \bigcup_{i=1}^{100} A_i = (-1, \frac{99}{100})$$

$$\text{ب) } \bigcap_{i=1}^{100} A_i = (-\frac{1}{100}, 0)$$

$$\text{ج) } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (0, 0) = \emptyset$$

$$\text{د) } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (-1, 1)$$

۸- با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید :

$$\begin{aligned} \text{الف) } (A \cup B) - (B \cup C) &= (A - B) - C \rightarrow (A \cup B) \cap (B \cup C)^c \\ &= (A \cup B) \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) \\ [A \cap (\bar{B} \cap \bar{C})] \cup [B \cap (\bar{B} \cap \bar{C})] &\rightarrow (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \rightarrow (A - B) - C \\ &= [(A \cup B) \cap \emptyset] \cap \bar{C} = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A - B) - C \\ \text{ب) } (B \cup C) - A &= (B - A) \cup (C - A) \\ \rightarrow (B \cup C) \cap \bar{A} &= (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) = (B - A) \cup (C - A) \end{aligned}$$

$$C \cap (A \cup B) = (A - C) \cup (B \cap C) \rightarrow (C \cap A) \cup (C \cap B) = (A - C) \cup (B \cap C)$$

۹- تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه  $(K - 1)$  عضوی از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه

$(K - 3)$  عضوی، ۴۸ واحد بیشتر است. عدد طبیعی  $K$  را بدست آورید.

$$2^{K-1} = 2^{K-3} + 48 \rightarrow 2^{K-1} - 2^{K-3} = 48 \rightarrow 2^{K-3}(4-1) = 48 \rightarrow 2^{K-3} = 16$$

$$= K - 3 = 4 \rightarrow K = 7$$

۱۰- الف) ثابت کنید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\rightarrow n(A \cup B) = n(A - (A \cap B)) + n(A \cap B) + n(B - (A \cap B))$$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ب) با استفاده از بخش اول ثابت کنید:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] =$$

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

۱۱- اعداد اعشاری زیر را به کسر متعارفی تبدیل کنید.

$$x \text{ (الف)} = \frac{2}{284} = 2 + \frac{0}{284} = 2 + \frac{284 - 28}{900} = \frac{1800}{900} + \frac{256}{900} = \frac{2056}{900} = \frac{257}{1125}$$

$$\text{ب) } y = \overline{.185} - \overline{.282} \rightarrow y = \frac{185}{99} - \frac{282-2}{990} = \frac{185}{99} - \frac{280}{990} = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$$

۱۲- بین اعداد  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  به تعداد ( $n$ ) عدد گویا بنویسید.

\*\* چون  $n$  عدد گویا می خواهیم پس صورت و مخرج کسرهای  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  را در  $n+1$  ضرب می کنیم.

$$\frac{1}{3} \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{2}{6} \text{ و } \frac{3}{6}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{2n+2}{6n+6} < \frac{2n+3}{6n+6} < \frac{2n+4}{6n+6} < \dots < \frac{3n+2}{6n+6} < \frac{3n+3}{6n+6} = \frac{3}{6}$$

\*\*  $n$  عدد وجود دارد زیرا :

$$3n+2 - (2n+3) + 1 = 3n+2 - 2n-3 + 1$$

پایان